X. *De Reductione* Radicalium *ad simpliciores terminos, seu de* extrahenda radice *quacunque data ex* Binomio $a+\sqrt{+b}$, *vel* $a+\sqrt{-b}$. EPISTOLA.

GULIELMO JONES, *Armigero, S. P. D.*
A. De MOIVRE.

CUM nuper incidisses, Amice doctissime, in locum quendam Sandersoni Algebræ, ubi occurrunt nonnulla, quæ ego Editori impertiveram eo spectantia, ut Methodum exponerem, qua liceret extrahere Radicem quamcunque datam ex Binomio $a+\sqrt{-b}$; *hoc autem in casu Radicis cubicæ, Clarissimus Auctor paulo antequam mortem obiret, me rogaverat, ut facere tentarem, utpote qui minime acquiescere poterat in iis quæ circa hanc rem tradiderat Wallisius; hac data occasione a me quæsivisti, num Methodus aliqua mihi suppeteret illud idem faciendi in Binomio possibili* $a+\sqrt{+b}$, *quod quidem judicabas aliquanto facilius fieri posse, respondi te non ignorasse illud fuisse a plurimis præstitum, præsertim a Newtono, atque adeo, si ad rem denuo aggrederer, me vix arrogantiæ crimen effugere posse; cum tamen hac mea excusatione haud tibi satisfieri sentirem, instaresque ut quicquid de hoc Argumento mihi in mentem veniret, in Chartam conjicerem, hæc sequentia exaravi, eo potissimum animo, ut mei erga te obsequii pignus publicum tibi darem. Vale.*

Ooo 2 PROB.

PROBLEMA I.

SIT Binomium $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ ad ſimpliciores Terminos reducendum.

SOLUTIO.

Finge Binomium illud generali ſua Radicalitate involutum ad Binomium iſtud alterum $x+\sqrt{y}$ Radicalitate generali exutum reduci poſſe; ut autem inveniatur utraque quantitas x & y, experire an ſumma Binomiorum $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$, quam capere licet ope Tabulæ Logarithmorum, conficiat numerum integrum quamproxime; quod ſi acciderit, pone $2x$ æqualem huic integro; vide præterea, an $\sqrt[n]{aa-b}$ ſit numerus integer; quod ſi fiat, pone m æqualem huic novo Integro, eritque $y=xx-m$, quamobrem Binomium datum reducetur ad formam datam.

Priuſquam vero ad Demonſtrationem accedamus, non incommodum erit rem binis terniſve Exemplis illuſtrare.

EXEMPLUM 1um.

Sit ergo Binomium $\sqrt[2]{54+\sqrt{980}}$ ad ſimplicius reducendum.

Pone

Pone $a=54$, $b=980$; erit igitur $\sqrt{b}=\sqrt{980}$ $=31,3049$ prope, quo fiet ut $a+\sqrt{b}$ futurum sit $=85,3049$, atque $a-\sqrt{b}=22,6951$.

Radix quadrata prioris numeri est 9,236 proxime.

Radix quadrata posterioris est 4,763.

Summa Radicum est 13,999, cui proxime adjacet integer 14; pone igitur $2x=14$, seu $x=7$; jam cum sit $y=xx-m$, sitque $m=\sqrt{aa-b}=\sqrt{2916-980}$ $=\sqrt{1936}=44$; erit propterea $y=49-44=5$, atque adeo Binomium reductum erit $7+\sqrt{5}$; quod vide, si lubet, an non ita sit.

Exemplum 2um.

Sit $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$ ad simplicius reducendum.

Pone $a=45$, $b=1682$, erit igitur $\sqrt{b}=41,01219$ proxime; erit idcirco $a+\sqrt{b}=86,01219$, atque $a-\sqrt{b}=3,89781$.

Radix cubica prioris numeri est 4,4142; Radix cubica posterioris est 1,5857; summa Radicum est 5,9999, cui proxime adjacet integer 6; pone ergo $2x=6$, seu $x=3$; sed est $y=xx-m$; est autem m $=\sqrt[3]{aa-b}=\sqrt[3]{343}=7$; atque adeò $y=9-7=2$; est igitur Binomium reductum $3+\sqrt{2}$.

Exemplum 3um.

Sit $\sqrt[3]{170+\sqrt{18252}}$ ad simplicius reducendum.

Pone $a=170$, $b=18252$, erit igitur $\sqrt{b}=135,1$ proxime; quapropter erit $a+\sqrt{b}=305,1$, & $a-\sqrt{b}$ $=34,9$.

Radix

Radix cubica prioris numeri eſt 6,73 proxime.

Radix cubica poſterioris eſt 3,26 proxime.

Summa Radicum eſt 9,99, cui proxime adjacet integer 10; pone igitur $2x=10$, ſeu $x=5$, porro eſt $y=xx-m$; jam vero $m=\sqrt[3]{aa-b}=22$; eſt itaque $y=25-22=3$; eſt igitur $5+\sqrt{3}$ Binomium reductum.

DEMONSTRATIO.

Sume Binomium quodvis, quale $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$, quod finge ad Binomium $x+\sqrt{y}$ reduci poſſe; eſt igitur,
$x^3+3xx\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$;
pone $x^3+3xy=a$,
& $3xx\sqrt{y}+y\sqrt{y}=\sqrt{b}$.
Qualiſcunque autem fuerit index Radicalitatis, ex quadrato prioris partis ſubtrahe quadratum poſterioris; porro quadratum prioris partis erit
$x^6+6x^4y+9xxyy=aa$;
quadratum poſterioris $9x^4y+6xxyy+y^3=b$;
reſiduum erit $x^6-3x^4y+3xxyy-y^3=aa-b$,
extrahe utrinque Radicem cujus index eſt n, hoc eſt, hoc in caſu, Radicem cubicam; erit igitur $xx-y=\sqrt[3]{aa-b}$, ſive facto $\sqrt[3]{aa-b}=m$; erit $xx-y=m$; adeoque $y=xx-m$; jam in Æquatione ſuperius ſcripta, nempe $x^3+3xy=a$, pro y ſcribe $xx-m$, obtinebis Æquationem $4x^3-3mx=a$; hic paululum conſiſte.

Reſume nunc Æquationem $2x=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, et finge te velle Radicalitatem $\sqrt[3]{}$ delere; quo

quo id fiat, pone $a+\sqrt{b}=z^3$,
& $a-\sqrt{b}=v^3$;
habebis igitur has binas Æquationes novas,

$$z^3+v^3=2a$$
$$z+v=2x$$

Sequitur ergo fore $\frac{z^3+v^3}{z+v}=\frac{a}{x}$

Sed $\frac{z^3+v^3}{z+v}=zz-zv+vv$; est igitur $zz-zv+vv=\frac{a}{x}$; est præterea $zz+2zv+vv=4xx$.

Sume differentiam harum Æquationum, habebis $3zv=4xx-\frac{a}{x}$; sed $z^3v^3=aa-b$; est igitur $zv=\sqrt[3]{aa-b}$; quod si posueris $=m$, inde fiet $3m=4xx-\frac{a}{x}$, sive $4x^3-3mx=a$, quæ est ipsissima Æquatio, quæ ante se protulerat, & res eodem recidet in casu quocunque Radicalitatis.

Si ergo tibi sit tentandum, an possit Expressio $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ ad simpliciorem reduci; pone $2x=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$; pone etiam $\sqrt[n]{aa-b}=m$, atque $y=xx-m$; & erit expressio reducta $x+\sqrt{y}$, si modo hæc possint fieri per quantitates integras aut saltem rationales.

Verum ne quidem sint hæ quantitates integræ aut rationales, Regula tamen, quam tradidimus, erit utilis sol-

ſolvendis Æquationibus cujuſdam generis, ut poſtea videbitur.

Interim, hic dubium fortaſſe oriri poteſt, an in poteſtatibus quibuſcunque Binomii, hæc Regula univerſe obtineat, nempe, quod in Binomio quocunque expanſo, cujus Index eſt n, ſi ex quadrato ſummæ eorum Terminorum, qui in imparibus locis conſiſtunt, ſubtrahatur quadratum ſummæ eorum, qui conſiſtunt in paribus locis, reſiduum futurum ſit Binomium aliud cujus Index etiamnum futurum ſit n.

Cui reſpondeo, illud à pluribus ſcriptoribus ante me fuiſſe obſervatum, adeoque rem tanquam experimentis ſtabilitam aſſumi poſſe; attamen Demonſtrationem afferre, non pigebit, quam non memini me uſquam vidiſſe.

Sume Binomium $\overline{x+y}|^n$ quod expande; ſume etiam Binomium alterum $\overline{x-y}|^n$, quod ſimiliter expande; ſit $\overline{x+y}|^n = s$, & $\overline{x-y}|^n = p$; jam cuilibet inſpicienti patebit, ſi Binomia expanſa additione jungantur, eorum ſummam futuram fore æqualem duplæ ſummæ terminorum imparium prioris Binomii; ſin poſterius ex priori ſubtrahatur, futurum fore reſiduum æquale duplæ ſummæ Terminorum parium prioris itidem Binomii; quod cum ita ſit, ſequitur $\frac{s+p}{2}$, eſſe ſummam terminorum imparium; itemque $\frac{s-p}{2}$, ſummam terminorum parium.

Ex quadrato prioris ſummæ, hoc eſt, ex quadrato $\frac{ss+2ps+pp}{4}$, ſubtrahe quadratum poſterioris, videlicet

licet $\frac{ss - 2ps + pp}{4}$, residuum erit $\frac{4ps}{4} = sp$ $= \overline{x+y}|^n \times \overline{x-y}|^n = \overline{xx-yy}|^n$, cujus Radix, (cui index est n) $= xx - yy$.

COROLLARIUM.

Si ponatur $2x = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}$, sumaturque præterea $\sqrt[n]{aa - b} = m$, atque interpreteris n successive per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. orientur Æquationes hic subjectæ.

1°. $x = a$.

2°. $2xx - m = a$.

3°. $4x^3 - 3mx = a$.

4°. $8x^4 - 8mxx + mm = a$.

5°. $16x^5 - 20mx^3 + 5mmx = a$.

6°. $32x^6 - 48mx^4 + 18mmxx - m^3 = a$.

7°. $64x^7 - 112mx^5 + 56mmx^3 - 7m^3x = a$.

&c.

Hæ autem Æquationes ejusdem sunt formæ atque Æquationes ad Cosinus, quamquam natura omnino diffideant.

Sit r radius Circuli, l Cosinus arcus cujuslibet dati, x Cosinus alterius arcus, qui sit ad priorem ut 1 ad n.

1°. erit $x = l$.

2°. $2xx - rr = rl$.

3°. $4x^3 - 3rrx = rrl$.

4°. $8x^4 - 8rrxx + r^4 = r^3 l$.

5°. $16x^5 - 20rrx^3 + 5r^4x = r^4 l$.

6°. $32x^6 - 48rrx^4 + 18r^4xx - r^6 = r^5 l$.

7°. $64x^7 - 112rrx^5 + 56r^4x^3 - 7r\ x = r^6 l$.

&c. Ppp Harum

Harum vero generalis forma hæc eſt, ponendo brevitatis cauſa $r = 1$.

$$2^{n-1} \times x^{n} - 2^{n-3} \times \frac{n}{1} x^{n-2} + 2^{n-5} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-3}{2} x^{n-4}$$

$$- 2^{n-7} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \frac{n-5}{3} x^{n-6} + 2^{n-9} \times \frac{n}{1} \cdot \frac{n-5}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot \frac{n-7}{4} x^{n-8}$$

&c. $= l$.

Differentia harum Æquationum in hoc potiſſimum ponitur, ut priores ortum ducant ab Æquatione $2x = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}$, poſteriores vero ab Æquatione $2x = \sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$, quæ poſterior Æquatio ſi Radicalitate ſua generali liberetur, obtinebuntur Æquationes ad Coſinus. Hoc autem perficietur modo ſequenti, quem tanquam ſpecimen propono.

Sit ergo Æquatio $2x = \sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-b}}$, quam liberare oporteat ſigno ſuo Radicali $\sqrt[3]{}$.

Pone $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} = z$, & $\sqrt[3]{a - \sqrt{-b}} = v$; pone tiam $z + v = 2x$. Hinc fiet ut habeas,

1°. $z^3 = a + \sqrt{-b}$.

2°. $v^3 = a - \sqrt{-b}$.

hinc erit $z^3 + v^3 = 2a$.

Sed $z + v = 2x$, erit igitur $\frac{z^3 + v^3}{z + v} = \frac{a}{x}$;

Sed

Sed $\frac{z^3+v^3}{z+v}=zz-zv+vv$; quamobrem fiet

ut $zz-zv+vv$ fit $=\frac{a}{x}$.

Sed $zz+2zv+vv=4xx$; unde fit $3zv$

$=4xx-\frac{a}{x}$;

jam vero eft $z^3 v^3=aa+b$.

Sequitur ergo, ut fit $zv=\sqrt[3]{aa+b}$; quam fi pofueris $=m$, erit propterea $4xx-\frac{a}{x}=3m$, five

$4x^3-3mx=a$.

Hactenus habuimus duplex genus Æquationum; prius, in quo m pofita fuerat $=\sqrt[3]{aa-b}$; pofterius, in quo fuerat $=\sqrt[3]{aa+b}$. Prius appellare licet Hyperbolicum, pofterius Circulare.

PROBLEMA II.

Extrahere Radicem cubicam ex Binomio impossibili $a+\sqrt{-b}$.

Solutio.

Finge Radicem illam esse $x+\sqrt{-y}$, cujus si sumpseris Cubum, invenies esse $x^3+3xx\sqrt{-y}-3xy-y\sqrt{-y}$.

Pone jam $x^3-3xy=a$,

& $3xx\sqrt{-y}-y\sqrt{-y}=\sqrt{-b}$.

Tunc sumendo quadrata, orientur alteræ binæ Æquationes, nempe

$$x^6-6x^4y+9xxyy=aa.$$
$$-9x^4y+6xxyy-y^3=-b.$$

Jam sume differentiam quadratorum, erit $x^6+3x^4y+3xxyy+y^3=aa+b$; quapropter est $xx+y=\sqrt[3]{aa+b}$: pone nunc $\sqrt[3]{aa+b}=m$, unde erit $xx+y=m$, sive $y=m-xx$; jam nunc in Æquatione $x^3-3xy=a$, in locum quantitatis y, substitue valorem ejus $m-xx$, habebis $x^3-3mx+3x^3=a$, sive $4x^3-3mx=a$, quæ est ipsissima Æquatio, quæ prius deducta fuerat ex Æquatione

$2x=\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$; attamen non sequitur ut possit in Æquatione $4x^3-3mx=a$, valor quantitatis x cognosci, per superiorem Æquationem, quippe quæ constet ex binis partibus, quarum utraque includit quantitatem imaginariam $\sqrt{-b}$; sed res optime conficietur subsidio Tabulæ sinuum.

Sit

Sit igitur extrahenda Radix cubica ex Binomio $81 + \sqrt{-2700}$; pone $a = 81$, $b = 2700$; jam vero $aa + b = 6561 + 2700 = 9261$, cujus Radix cubica $= 21$, quam pone $= m$, quo fiet ut $3mx = 63x$; erit igitur resolvenda Æquatio $4x^3 - 63x = 81$, quæ si comparetur cum Æquatione ad Cosinus, scilicet $4x^3 - 3rrx = rrl$, erit $rr = 21$; proinde erit $r = \sqrt{21}$; erit præterea $l = \frac{a}{rr} = \frac{81}{21} = \frac{27}{7}$.

Sit igitur arcus Circuli, cujus Radius sit $= \sqrt{21}$, Cosinus $= \frac{27}{7}$.

Sit C Circumferentia tota, sume Arcus $\frac{A}{3}$, $\frac{C-A}{3}$, $\frac{C+A}{3}$ qui calculo Trigonometrico facile innotescent; præsertim si adhibeantur Logarithmi, tunc Cosinus ipsorummet Arcuum ad Radium $\sqrt{21}$, erunt tres Radices quantitatis x; quapropter cum sit $y = m - xx$, erunt idcirco totidem valores quantitatis y, erit itaque Radix cubica triplex Binomii $81 + \sqrt{-2700}$, sed lubet rem ad Numeros accommodare.

Fac ut $\sqrt{21}$ ad $\frac{27}{7}$, sic Radius Tabularum ad Cosinum Arcus cujusdem cui arcui pone A æqualem; arcus autem ille reperietur $23^d, 42'$ prope; hinc arcus $C - A$, erit $327^d, 18'$, & $C + A$ $392^d, 42'$, quorum partes tertiæ erunt $10^d, 54'$; $109^d, 6'$; $130^d, 54'$; jam vero cum earum prima sit quadrante minor, Cosinus ejus, hoc est, sinus $79^d, 6'$, spectari debet tanquam positivus; alteri ambo cum sint quadrante Majores, eorum

rum Cosinus, hoc est, sinus Arcuum $19^d, 6'$; $40^d, 54'$. spectari debent tanquam negativi; sed ex calculo Trigonometrico constabit hos sinus ad Radium $\sqrt{21}$, fore $4,4999, -1,4999, -3,0000$, sive $\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -3$; quo fit ut totidem futuri sint valores quantitatis y, hi scilicet quos $m - xx$ repræsentat omnes, hoc est, $21 - \frac{81}{4}, 21 - \frac{9}{4}, 21 - 9 = \frac{3}{4}, \frac{75}{4}, 12$, quorum Radices quadratæ sunt $\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$; quapropter tres valores quantitatis $\sqrt{-y}$ erunt $\frac{1}{2}\sqrt{-3}, \frac{5}{2}\sqrt{-3}, 2\sqrt{-3}$; ex quo fit ut, tres valores quantitatis $\sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}}$ sint $\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{-3}$, $-3 + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, eodemque procedendi modo, invenientur tres valores quantitatis $\sqrt[3]{81 - \sqrt{-2700}}$, hi scilicet $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{-3}$, $-3 - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Fuere non pauci, inter quos eminet Wallisius, qui putarunt eas Cubicas Æquationes, quæ ad Circulum referuntur, posse solvi per extractionem Radicis Cubicæ ex quantitate imaginaria, qualis est, v. g. $81 + \sqrt{-2700}$, nulla habita ratione Tabulæ sinuum; sed quicquid de hac re commenti sunt, vanum est Figmentum, & petitio Principii; si enim rem tentaris, tibi necessario recurrendum erit in eam Æquationem, quam tibi solvendam sumpseras. Illud autem directe fieri non potest, nisi subsidio Tabulæ Sinuum, præsertim si Radices sint irrationales; id autem a pluribus ante me fuit observatum. Sed non alienum erit rem ulterius prosequi.

PROBLEMA III.

Sit extrahenda Radix, cujus Index est n, ex Binomio impossibili $a+\sqrt{-b}$.

SOLUTIO.

Sit ea Radix $x+\sqrt{-y}$, tunc facto $\sqrt[n]{aa+b}=m$; facto etiam $\frac{n-1}{n}=p$, describe circulum, vel finge describi, cujus Radius sit $\sqrt{m}$, in eoque sume arcum quendam A, cujus Cosinus sit $\frac{a}{m^p}$; sit C Circumferentia tota. Sume ad eundem Radium, Cosinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, &c.

Donec eorum multitudo adæquet numerum n; quo facto, ibi siste; tunc Cosinus ille omnes erunt totidem valores quantitatis x; quod attinet ad quantitatem y, ea semper erit $m-xx$.

Non prætermittendum est, quanquam mentio superius injecta fuerit, eos Cosinus affirmativos censeri oportere, quorum arcus minores sunt Quadrante, illos autem Negativos quorum arcus sunt Quadrante majores.

PRO-

PROBLEMA IV.

Data Æquatione aliqua ex earum genere, quas ſupra deſcripſimus, dignoſcere an ejus ſolutio ad ſpeciem Hyperbolicam, an vero ad Circularem referenda ſit.

SOLUTIO.

Sit n altiſſima dimenſio Æquationis; divide Coefficientem ſecundi termini per $2^{n-3} \times n$, ſitque Quotus $= m$; jam vide an Quadratum aa majus minuſve ſit poteſtate m^{n}; ſi prior caſus acciderit, Æquatio ad Hyperbolam referenda eſt; ſin poſterior, ad Circulum.

Detur Æquatio $16x^5 - 40x^3 + 20x = 7$, ubi $n = 5$, erit igitur $2^{n-3} \times n = 20$: Divide 40 per 20 quotus eſt $2 = m$, porro $m^{n} = 32$, & quadratum $aa = 49$; quod cum majus ſit poteſtate 32, conſequens eſt, Æquationem ad ſpeciem Hyperbolicam referendam eſſe; ſed cum in caſu Hyperbolico poſitum fuerit $\sqrt[5]{aa - b} = m$, ſequitur eſſe $aa - b = m^5 = 32$, adeoque $b = aa - 32 = 49 - 32 = 17$: Jam vero Radix Æquationis, in hoc caſu, eſt $\frac{1}{2}\sqrt[5]{7 + \sqrt{17}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}}$; ſed $\sqrt{17} = 4{,}123105$ prope, eſt igitur $7 + \sqrt{17} = 11{,}123105$, & $7 - \sqrt{17} = 2{,}876895$; porro Radix quinta prioris numeri invenietur $= 1{,}6221$,

Radix

Radix quinta posterioris = 1,2353, summa Radicum = 2,8574, Dimidia summa 1,4287, est valor quantitatis x in Æquatione data.

Jam detur Æquatio $16x^5 - 40x^3 + 20x = 5$; in qua m etiamnum est = 2, at $a = 5$, patet quadratum aa minus esse quinta potestate numeri 2; quapropter valor incognitæ x non potest elici nisi per quinquisectionem anguli; illud autem perficietur ope Theorematis nostri generalis, ante allati, sumendo ad Radium $\sqrt{2}$, arcum cujus Cosinus sit $\frac{a}{m^p} = \frac{a}{4} = \frac{5}{4}$, Arcus autem ille reperietur 27^d, $55'$ prope, cujus quinta pars est 5^d, $35'$; jam vero si sumpseris Logarithmum Cosinus istius arcus ad Radium 1, illum reperies esse 9,9979347; sed cum Radius noster debeat esse $\sqrt{2}$, superiori Logarithmo adde Logarithmum $\sqrt{2}$, hoc est 0,1515150, summa erit 10,1484497 e qua si dempseris 10, residuum, nempe 0,1484497, erit Logarithmus Numeri quæsiti, qui proinde erit 1,4075 proxime, eodemque modo reliquæ quatuor Radices inveniri possunt.

Pauca quædam supersunt observanda, quæ hic subjiciam.

Si Æquatio sit Hyperbolici generis, sitque præterea n numerus impar, erit una tantummodo Radix possibilis, reliquæ erunt impossibiles; sin sit n, numerus par, erit unus tantum valor quadrati xx, reliqui sunt impossibiles.

Si Æquatio sit Circularis generis, omnes Radices erunt possibiles.

Quo facile dignoſcatur quot futuræ ſint Radices Affirmativæ, quot Negativæ, in Æquationibus ad Coſinus, hæc obſervetur Regula.

Si fuerit n Numerus par, tot erunt Radices Affirmativæ quot Negativæ.

Si fuerit n numerus impar, talis tamen ut $\frac{n+1}{2}$, ſit numerus par, numerus Affirmativarum erit $\frac{n-1}{2}$, numerus Negativarum $\frac{n+1}{2}$.

Sin $\frac{n+1}{2}$ fuerit numerus impar, numerus Affirmativarum erit $\frac{n+1}{2}$, Negativarum $\frac{n-1}{2}$.

Aliqua huc ſpectantia jampridem inveneram, quæ Actis Philoſophicis inſerta fuerunt Anno 1707, deinde fuſius fuerant expoſita in Libro, qui inſcribitur *Miſcellanea Analytica*; ſed cum ratio proceſſus fuerit huic paulo diſſimilis, nec fortaſſe adeo dilucida, nec directe ad eundem ſcopum collimans, hæc, ſpero, non inutilia judicabuntur.

FINIS.

ERRATA.

Page 40. *Line penult. for* Meaſurations, *read* Menſurations.

P. 384. *after l.* 11. *add* and if ſingle, whether the reſpective Poles were oppoſite?

ERRATUM.

In Vol. XXXIV. *n.* 393. *p.* 66. *the Latitude of* Southwick *ſhould be* 52° 31'. nearly, *inſtead of* 51° 58'. nearly, *as it is by Miſtake there printed.*

To the Bookbinder.

The *Croonean* Lectures on Muſcular Motion for the Year 1738. are to follow this Page.